

Instuderingsfrågor endim B1

Kapitel 1: Grundläggande begrepp och terminologi

1 $\mathbb{N}$ betecknar de Naturliga talen alltså de positiva heltalen. Vanligtvis inkluderas även 0.

$\mathbb{Z}$ betecknar samtliga heltal

$\mathbb{Q}$ betecknar de rationella talen dvs de tal som kan skrivas som en kvot mellan två heltal

$\mathbb{R}$ betecknar de reella talen alltså samtliga tal på tallinjen

2 $\in$ betyder tillhör t.ex: $3 \in \mathbb{N}$ 3 är ett naturligt tal
 $\pi \notin \mathbb{Q}$ π är inte ett rationellt tal

$\subseteq$ betyder delmängd av t.ex: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ De naturliga talen är heltal

$\{1\} \subseteq \{1,2\}$ Talet 1 är en del av talen 1,2

$\emptyset$ betecknar den tomma mängden dvs en mängd som helt saknar element

$\Rightarrow$ betyder implikation eller att ett uttryck medför ett annat

$\Leftrightarrow$ betyder ekvivalens dvs att ett uttryck medför ett annat och att detta uttryck i sin tur medför det första

t.ex: $A: x \in \mathbb{Q}$

$B: x \in \mathbb{Z}$

$A \not\Rightarrow B$ men $B \Rightarrow A$ alltså $A \not\Leftrightarrow B$

$C: x+6=8$

$D: x=2$

$C \Rightarrow D$ och $D \Rightarrow C$ alltså $C \Leftrightarrow D$

3 Eftersom $Y \Leftrightarrow Z \Rightarrow Y \Rightarrow Z$ är det inte samma sak att använda $\Leftrightarrow$ och $\Rightarrow$ mellan uttryck

Kapitel 2: Algebra

- 4 Bråk adderas genom att sätta talen på gemensam nämnare och sedan addera täljarna. I praktiken används minsta gemensamma nämnare och inte bd i exemplet.

$$\text{t.ex: } \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

- Bråk multiplikeras genom att multiplitera nämnare med nämnare och täljare med täljare

$$\text{t.ex: } \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

- Bråk divideras genom att vända på täljaren och multiplitera nämnare med denna.

$$\text{t.ex: } \frac{2}{3} / \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$$

- 5 Kvadrathkomplettering innebär att skriva om ett andra gradspolynom så att det bara innehåller en x -term mha kvadreringsregeln

$$\text{t.ex: } x^2 + 7x + 3 = (x + 3.5)^2 - 3.5^2 + 3 = (x + 3.5)^2 - \frac{37}{4}$$

- 6 Polynomdivision: eller sats 2.1 säger att om $f(x)$ och $g(x)$ är polynom och $\deg g(x) \geq 1$ så finns polynom $q(x)$ och $r(x)$ så att $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ där $\deg r(x) < \deg g(x)$

Faktorsatsen eller sats 2.2 säger att om $f(x)$ är ett polynom och α ett tal gäller det att $f(\alpha) = 0 \iff f(x) = (x - \alpha)q(x)$ för något polynom $q(x)$

Bevis $\Leftarrow$ Det gäller att $f(x) = (x - \alpha)q(x)$.

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0 \cdot q(\alpha) = 0 \text{ oberoende av } q(\alpha).$$

Dvs α är ett nollställe till $f(x)$.

Bevis $\Rightarrow$ Det gäller att $f(\alpha) = 0$.

Vi använder polynom division och dividerar $f(x)$ med $(x-\alpha)$. Vi vet då att det finns polynom $q(x)$ och $r(x)$ så att: $\frac{f(x)}{x-\alpha} = q(x) + \frac{r(x)}{x-\alpha}$ eller

$$f(x) = q(x)(x-\alpha) + r(x) \quad \text{där } \deg r(x) < \deg x-\alpha = 1$$

Det följer att $r(x) = C$. Vi vet att $f(\alpha) = C = 0$.

Alltså måste $f(x) = q(x)(x-\alpha)$.

Kapitel P: Plan geometri

7 **Axiom** är ett grundläggande påstående som anger egenskaper hos och relationer mellan begrepp. De får inte motsäga varandra.

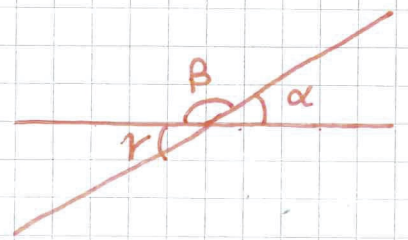
Definitioner förklarar och inför benämningar och beteckningar.

Satser är uttunga påståenden som man ofta återkommer till. De behöver bevisas genom hänvisning till hur de följer **axiomen** eller tidigare bevisade **satser**.

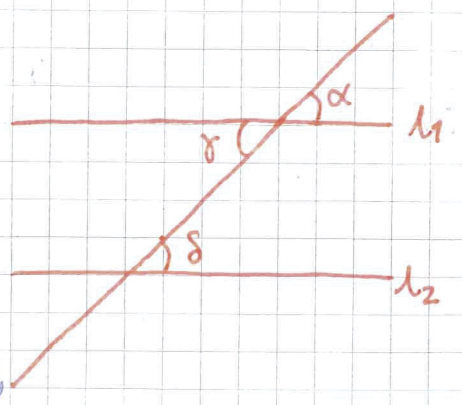
8 **Parallella linjer i planet** är två rätta linjer som inte skär varandra. Linjer är dock även **parallella** med sig själva.

9 α och γ kallas **vertikalvinklar** och är lika stora eftersom:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \gamma + \beta = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta = \gamma$$



10 **Parallellaxiomet** eller axiom 2 säger att om två parallella linjer skärs av en tredje så är likbelägna vinklar lika stora. Det omvända gäller också.



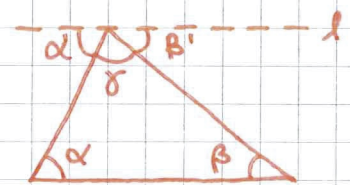
alltså om två linjebelägna vinklar, som uppkommit då en linje skär två andra, är lika stora så är de två senare linjerna parallella eller: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

11 Två trianglar är **kongruenta** om vinklarna respektive sidorna i den ena triangeln är lika med motsvarande vinklar och sidor i den andra triangeln. Enligt **kongruensaxiomet** är två trianglar kongruenta om de uppfyller något av följande:

- SVS - två sidor och mellanliggande vinkel är lika
- SSS - samtliga sidor är lika
- VSV - två vinklar och mellanliggande sida är lika.

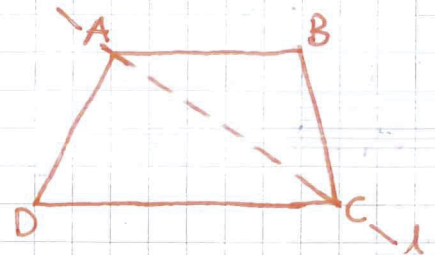
12 **Vinkelsumman i en triangel** är 180° .

Beis Drag genom ett hörn en linje l som är parallell med motstående sida. Enligt parallellaxiomet gäller då att $\alpha' = \alpha$ och $\beta' = \beta$.



Vinkelsumman i en fyrhörning är 360°

Beis Låt ABCD vara en godtydlig fyrhörning. Dra en rät linje l genom hörnen A och C. Vinkelsumman för

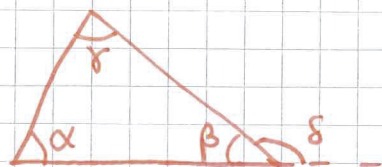


ABCD är lika med vinkelsumman för trianglarna ABC och ADC. Dessa har enligt ovan vinkelsumman 180° vilket medför att ABCD har vinkelsumman 360° .

13 Yttervinkelsatsen eller sats 4

säger att en yttre vinkel till en triangel är lika med summan av de två motstående vinklarna.

Dvs $\delta = \alpha + \gamma$.



Bevis Detta följer direkt ur att:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \beta = 180^\circ \\ \beta + \delta = 180^\circ \end{cases}$$

14 En **cirkel definieras** som alla punkter som ligger på ett givet avstånd r (radie) från en given punkt (medelpunkten eller centrum).

Ett **parallelogram definieras** som en fyrhörning där motstående sidor är parallella.

En **romb definieras** som en fyrhörning där alla sidor är lika långa.

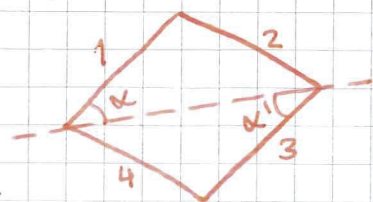
En **parallelltrapets definieras** som en fyrhörning med två motstående sidor som är parallella.

En **rektangel definieras** som en fyrhörning där alla vinklar är rätta.

En **kvadrat definieras** som en fyrhörning där alla sidor är lika långa och alla vinklar är rätta.

15 En **rektangel är ett parallelogram** följer av parallellaxiomet och eftersom två motstående sidor är normaler till en tredje sida. Längs denna tredje sida ser vi ju att tillägnade vinklar är lika (rätta).

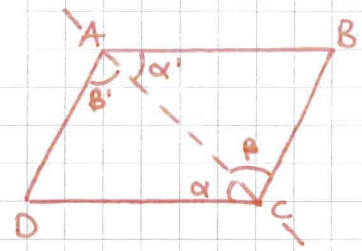
För att visa att en **romb är ett parallelogram** drar vi en rät linje



genom två motstående hörn. De två triangelarna som bildats är kongruenta enligt SSS. Då följer det att $\alpha = \alpha'$ och enligt parallellaxiomet är då sida 1 & 3 parallella. Analog följer att sida 2 & 4 är parallella.

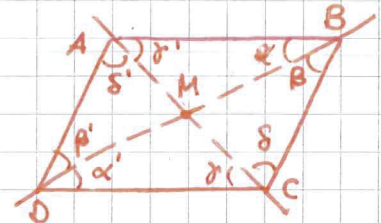
- 16 **Parallelogramsatsen** eller sats 6 säger att i ett parallelogram är såväl motstående sidor som vinklar lika stora.

Bevis Betrakta parallelogrammet ABCD och dra en diagonal AC. Enligt parallellaxiomet gäller



$\alpha = \alpha'$ och $\beta = \beta'$. Det följer då att $\angle A = \angle C$. Detta ger att triangelarna ABC och ADC är kongruenta enligt VSV. Då gäller alltså att $DC = AB$ och $AD = BC$ och $\angle D = \angle B$.

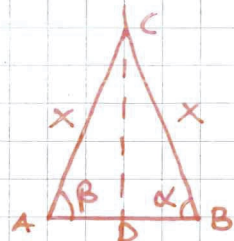
- 17 Vi vill visa att **diagonalerna delar varandra mitt** ite dvs att sträckorna $DM = MB$ och $AM = MC$.



Enligt parallellaxiomet är $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ och $\delta' = \delta$. Då gäller att triangelarna DMC och BMA är lika enligt kongruensfall VSV. Det följer då att $DM = MB$ & $AM = MC$.

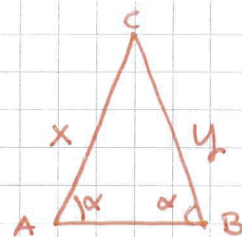
- 18 **Satsen om likbent triangel** eller

sats 7 säger att om två sidor i en triangel är lika långa är de båda motstående vinklarna lika stora, dvs. $\alpha = \beta$.



Bevis: Dra en bisectris genom C. Kongruensfall SVS ger att triangelarna ACD och BCD är lika, alltså $\alpha = \beta$.

Basvinkelsatsen eller sats 8 säger att om två vinklar i en triangel är lika stora så är de båda motstående sidorna lika långa, dvs $x = y$.



Bevis I triangeln ABC gäller att $\angle A$, sträckan AB och $\angle B$ lika med motsvarande element i triangel BAC. Kongruensfall VSV ger då att triangelarna är kongruenta vilket medför att $x = y$.

19

En **sluten polygon**, n-hörning eller månghörning, menas en figur som består av n stycken punkter, hörnen, och sträckor mellan dessa, sidorna, så att det till varje punkt går precis två sträckor. Vinkeln mellan två sidor får inte vara 180° och ingen sida får skära någon annan.

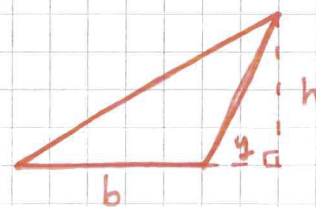
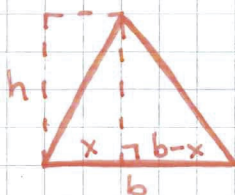
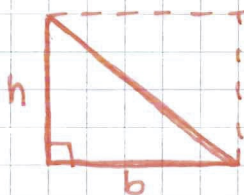
Arean för en sluten polygon beräknas genom att man delar upp den i trianglar och beräknar arean var för sig för dessa och lägger ihop.

20

En **triangel** med höjd h och basen b har **arean**

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Bevis



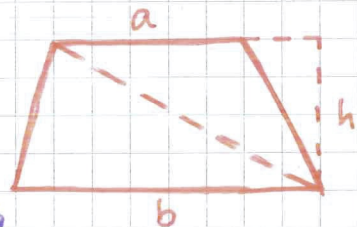
Betrakta först den rätvinkliga triangeln till vänster. Dra två rätta linjer parallella med kateterna genom de spetsiga hörnen. Denna rektangel har arean bh . Eftersom triangelarna är kongruenta har de lika stora area alltså $bh/2$.

För trianglar som inte är rätvinkliga kan arean skrivas som en summa eller differens av två rätvinkliga trianglar (se bild). Det gäller då att:

$$A = \frac{xh}{2} + \frac{(b-x)h}{2} = \frac{bh}{2} \quad \text{och} \quad A = \frac{(b+y)h}{2} - \frac{yh}{2} = \frac{bh}{2}$$

Ett parallelogram har arean

$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

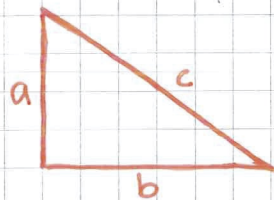


Bevis Dela in parallelogrammet i två trianglar mha diagonalen. De båda trianglarna har arean $\frac{bh}{2}$ och $\frac{ah}{2}$ vilket medför att deras totala area är $\frac{(a+b)h}{2}$.

Parallelltrapetsen, som är ett parallelogram med $a=b$, har arean ah . Detta inses lätt genom att sätta $a=b$ i formeln ovan.

21 **Pythagoras sats** eller sats 10

säger att i en rätvinklig triangel är kvadraten på hypotenusan lika med summan av kvadraterna på kateterna, dvs $a^2 + b^2 = c^2$.

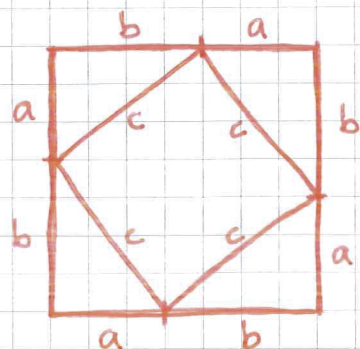


Bevis De fyra trianglarna är kongruenta enligt fall SVS. Alltså har alla inre sidor längden c .

Att den inre fyrhörningen enbart består av rätta vinklar följer av

att trianglarna är kongruenta och har vinkelsumman 180° . Arean av den stora kvadraten är lika med arean av den lilla plus triangelnas area. Alltså:

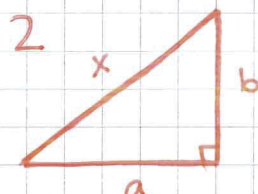
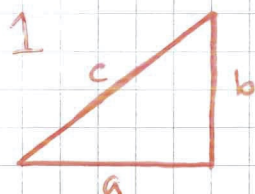
$$(a+b)^2 = 4 \frac{ab}{2} + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$



22. Två rätvinkliga trianglar med motsvarande hypotenusor och en kateter som är lika är kongruenta eftersom pytagorassats ger att även den andra katetern är lika stor. Kongruens ges då av fall SSS.

23. Omvändningen till pytagorassats eller sats II säger att om det i triangel med sidlängderna a, b och c gäller att $a^2 + b^2 = c^2$, så är triangeln rätvinklig där den räta vinkeln står mot sida c .

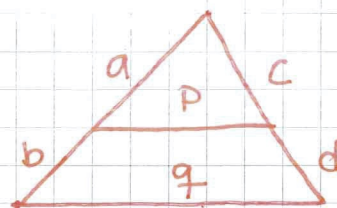
Bevis



I triangel 1 gäller att $a^2 + b^2 = c^2$ och för triangel 2 gäller att den är rätvinklig med lika långa katetrar som triangel 1. Enligt pytagorassats gäller då att $x^2 = a^2 + b^2$ vilket medför att $x^2 = c^2$ eller $x = c$. De båda trianglarna är då kongruenta enligt SSS vilket medför att triangel 1 är rätvinklig med den räta vinkeln mot sidan c .

24. Transversalsatsen eller sats

12 säger att en transversal, som är parallell med en sida i en triangel, delar de övriga



sidorna i lika förhållanden. Med figurens beteckningar gäller alltså: $p \parallel q \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

25. Två trianglar sägs vara **likformiga** om varje vinkel i den ena är lika stor som motsvarande

inikel i den andra och kvoterna av motsvarande sträckors längder är lika. Likformighet betecknas med $\sim$.

26 **Topptriangelnsatsen** eller sats

13 säger att en transversal, som är parallell med en sida i en triangel skär av en

topptriangel som är likformig med den stora triangeln.

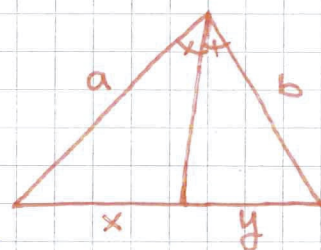


27 **Bisectrissatsen** eller sats 14

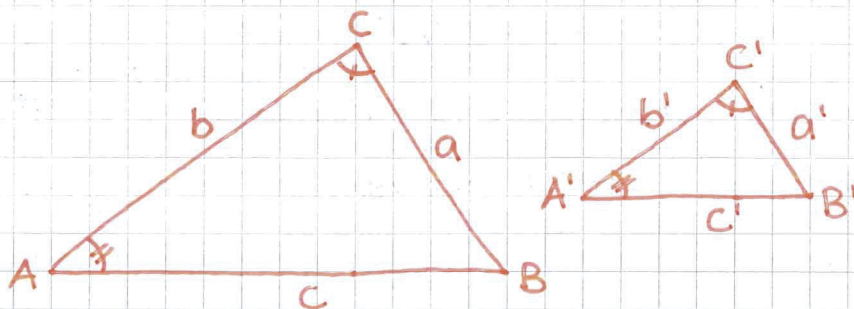
säger att en bisectris till en inikel i en triangel delar

motstående sida i ett förhållande

som är lika med kvoten av de övriga sidornas längder enligt $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.



28 **Likformighetsfallen** är enligt sats 15-17



- SVS - Två sidor i en triangel är proportionella mot två sidor i en annan triangel och mellanliggande inikel är lika, dvs:

$$\begin{cases} \angle C = \angle C' \\ \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

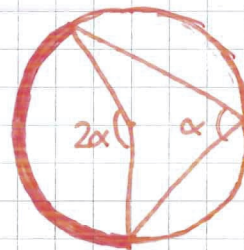
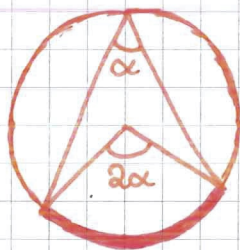
- SSS - Alla sidor i en triangel är proportionella mot sidorna i en annan triangel, dvs

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

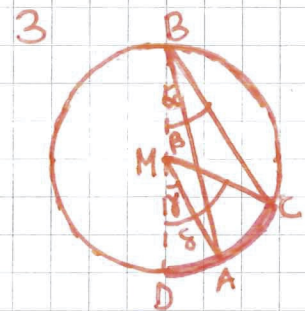
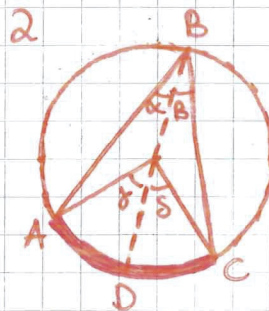
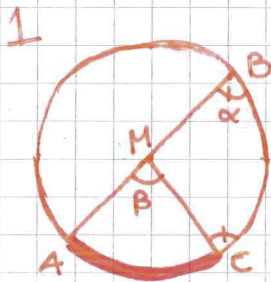
- VV - Två vinklar i en triangel är lika med två vinklar i en annan triangel, dvs

$$\begin{cases} \angle C = \angle C' \\ \angle A = \angle A' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

29 **Randvinkelsatsen** eller sats 18 säger att en randvinkel är hälften så stor som medelpunktsvinkeln på samma cirkelbåge.



Beis Tre fall kan förekomma beroende på var de två kordorna som utgör randvinkeln befinner sig i förhållande till medelpunkten.



Fall 1: Ena kordan är diametern AB. Triangeln BMC är liubent vilket gör att $\angle C = \alpha$. Yttervinkelsatsen ger att $\angle B = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

Fall 2: Fall 1 på $\triangle ABD$ respektive $\triangle DBC$ och addition ger:

$$\begin{cases} \gamma = 2\alpha \\ \delta = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \gamma + \delta = 2(\alpha + \beta)$$

Fall 3: Fall 1 på $\triangle ABD$ respektive $\triangle DBC$ och subtraktion ger:

$$\begin{cases} \gamma = 2\alpha \\ \delta = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \delta - \gamma = 2(\beta - \alpha)$$

Två omedelbara följder är att två randvinklar som står på samma båge är lika stora och att randvinklar som står på halvcirkelbågen är rätta.

- 30 En tangent är en rät linje som har precis en punkt gemensam med en cirkel. Tangenter har egenskapen att de alltid är vinkelräta mot radien genom tangeringspunkten.

Kapitel 3: Ekvationer och olikheter

- 31 Skillnaden mellan en ekvation och ett uttryck är att ekvationen innehåller en likhet. Exempel på skillnaden är:

$$\begin{array}{ll} 4x - 20 & \text{uttryck} \\ 4x - 20 = 2 & \text{ekvation} \end{array}$$

I båda fallen kan självklart fler än en obekant ingå.

- 32 Två ekvationer är ekvivalenta om omskrivningsstegen mellan dem går att utföra åt båda hållen. De fyra räknesätten erhåller alltid ekvivalenter, men inte alla andra linjer:

$$\begin{array}{ll} 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2 & \text{ekvivalens} \\ x = 3 \Rightarrow x^2 = 9 & \text{ej ekvivalens} \end{array}$$

- 33 Om man vill få fram en ny ekvivalent ekvation så kan man addera, subtrahera, multiplicera eller dividera. Exempel på operationer som inte säkert ger en ekvivalent ekvation är att dra kvadratroten ur, kvadrera eller dividera med något som kan vara lika med noll.

- 34 pq-formeln härleds via kvadratkompletering

$$\begin{aligned} \text{enligt: } x^2 + px + q &= 0 & \Leftrightarrow \\ (x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q &= 0 & \Leftrightarrow \\ (x + \frac{p}{2})^2 &= (\frac{p}{2})^2 - q & \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \iff$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \#$$

- 35 Olikheter som innehåller polynom eller kvoter av polynom angrips genom att lösa vanligt och sedan kontrollera rötterna genom insättning i ursprungsekvationen. Det är extra viktigt att kontrollera att rötterna inte ger division med noll.

Kapitel 4: Summor och talföljder

- 36 En aritmetisk summa är en summa där differensen mellan två efterföljande termer är konstant. Denna summa beräknas enligt:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- 37 En geometrisk summa är en summa där kvoten mellan två efterföljande termer är konstant. Denna summa beräknas enligt:

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Denna härleds enligt:

Betrakta $S = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$

Om vi multiplicerar med kvoten x får vi:

$$x \cdot S = x \cdot \sum_{k=0}^n x^k = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}$$

Vi ser här att nästan alla termer är lika. Vi subtraherar S från $x \cdot S$ så att termerna tar ut varandra:

$$\begin{aligned}
 xS - S &= (x-1)S = \sum_{k=0}^n x^{k+1} - \sum_{k=0}^n x^k = \\
 &= (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}) - (1 + x + x^2 + x^{n-1} + x^n) = \\
 &= x^{n+1} - 1
 \end{aligned}$$

För att få S ensamt dividerar vi med faktorn $x-1$:

$$S = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Observera att för kvoten 1, dvs $x=1$, gäller $S = n+1$ och då k inte börjar på noll kan vi bryta ut första termen för att återföra summan till rätt form:

$$\sum_{k=3}^8 x^k = x^3 \cdot \sum_{k=0}^5 x^k = x^3 \cdot \frac{x^6 - 1}{x - 1}$$

38 Fakultet definieras enligt $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ $n \geq 1$
med $0! = 1$

Binomialkoefficienterna definieras enligt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

vilket innebär att

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

39 $(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5$

Den allmänna binomialsatsen eller sats 4.3

säger att för varje heltal $n \geq 0$ gäller

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

40 Pascals triangel till och med $n=6$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

41 En geometrisk talföljd är en talföljd där kvoten mellan två ihjälliggande element är oförändrad: $(5(-2)^k)_{k=0}^{\infty} = 5, -10, 20, -40, \dots$

Kapitel A och 5: Analytisk geometri

42 Riktningskoefficienten k för en linje $y=kx+m$ i xy -planet anger linjens lutning. k är ett reellt tal.

43 En rät linje ges på formen $y=kx+m$. Om man känner riktningskoefficienten k och en punkt (x_1, y_1) på linjen fås ekvationen genom att använda enpunktsformeln: $y-y_1 = k(x-x_1)$. Om man känner två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) på linjen fås ekvationen genom användning av tvåpunktsformeln: $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} (x-x_1)$ under förutsättningen att $x_2 \neq x_1$, dvs att linjen inte är lodrät.

44 Normalen till en linje genom en given punkt ges av att man hittar riktningskoefficienten för normalen. Antag att linjen ges av $y = k_1 x + m_1$, och vi vill hitta normalen $y = k_2 x + m_2$ genom (x_1, y_1) . Sambandet mellan k_1 och k_2 är då att $k_1 k_2 = -1$ och m_2 fås av enpunktsformeln.

45 En parabel med symmetrilinje parallell med x-axeln, vertex i (x_0, y_0) och ligger till höger om $x = x_0$ ges av: $y - y_0 = k(x - x_0)^2 \quad x \geq x_0$.

Om parabeln ligger till vänster om $x = x_0$ gäller istället: $y - y_0 = k(x - x_0)^2 \quad x \leq x_0$.

46 Absolutbeloppet av ett reellt tal a betecknas $|a|$ och betyder avståndet från a till origo på tallinjen. Observera att ett avstånd alltid är ett icke-negativt tal.

47 För två punkter på tallinjen gäller följande formler

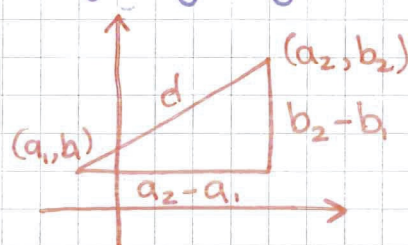
$$|-a| = |a| \quad |ab| = |a||b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad |a|^2 = a^2$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{triangelolikheten}$$

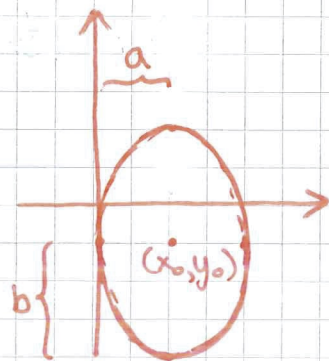
För två punkter i planet gäller enligt Pythagoras sats att:

$$d = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

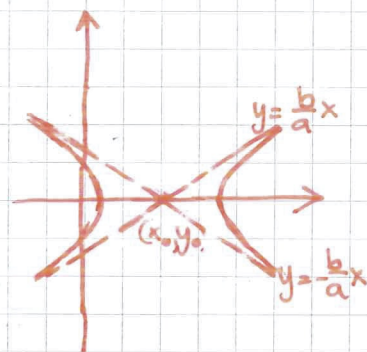


48 Cirkelns ekvation $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ härleds genom att använda Pythagoras sats på ett givet avstånd $r > 0$ och en given punkt (x_0, y_0) . Cirkeln består av alla punkter (x, y) vars avstånd till (x_0, y_0) är r .

- 49 En ellips med halvvaxlarna a och b och medelpunkt (x_0, y_0) anges av ekvationen $1 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$



- 50 En hyperbel anges av en ekvation på formen $1 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$. Om x och y byter plats dvs byter tecken kommer hyperbeln rotera 90° och istället vara speglad i en förskjuten x -axel.



- 51 Asymptoterna till $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ är $\pm \frac{b}{a}$

Kapitel 7: Funktionsbegreppet

- 52 En funktion är en regel f som för varje reellt tal x i definitionsmängden D_f ordnar precis ett tal. Dessa ordnade tal utgör värdemängden V_f .
- 53 Grafen G_f till en funktion menar den delmängd i planet som utgörs av punkterna $(x, f(x))$ där $x \in D_f$ och $f(x) \in V_f$. Detta beskriver vanligtvis en kurva i planet och kallas även funktionskurva.
- 54 Inversen f^{-1} till funktionen f är den funktion som till varje $y \in V_f$ ordnar det tal $x \in D_f$ som uppfyller ekvationen $y = f(x)$. Alltså $V_{f^{-1}} = D_f$ och $D_{f^{-1}} = V_f$. Inversfunktionen finns för varje funktion som uppfyller villkoret att den är injektiv, dvs för alla $x_1, x_2 \in D_f$ gäller att $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Det är alltså inte

alla funktioner som har invers.

55 En funktion är **växande** om det för alla $x_1, x_2 \in D_f$ gäller $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

En funktion är **strängt växande** om det för alla $x_1, x_2 \in D_f$ gäller $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

En funktion är **avtagande** om det för alla $x_1, x_2 \in D_f$ gäller $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

En funktion är **strängt avtagande** om det för alla $x_1, x_2 \in D_f$ gäller $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

56 En funktion som är både **strängt växande** och **uppåt begränsad** mellan $1 \leq x < \infty$ är $\ln(x)$.

57 En funktion kallas **jämn** om det för alla $x \in D_f$ gäller $f(-x) = f(x)$

En funktion kallas **udda** om det för alla $x \in D_f$ gäller $f(-x) = -f(x)$

58 Tre exempel på **jämna funktioner** är

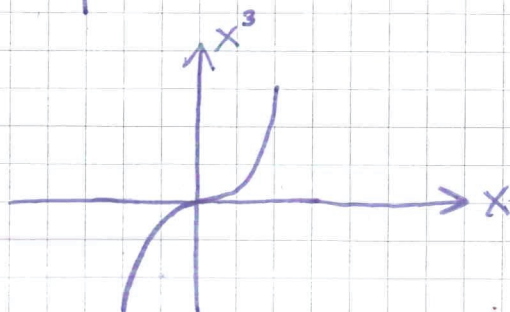
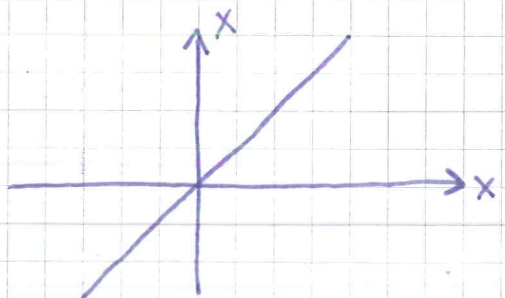
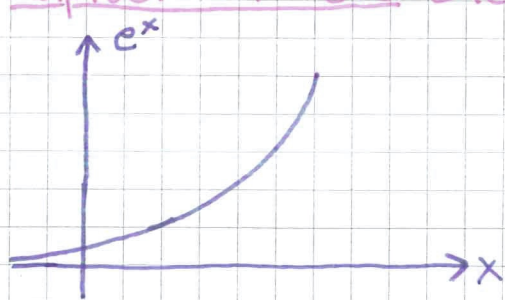
$f(x) = \sin x$, $f(x) = |x|$ och $f(x) = x^2$

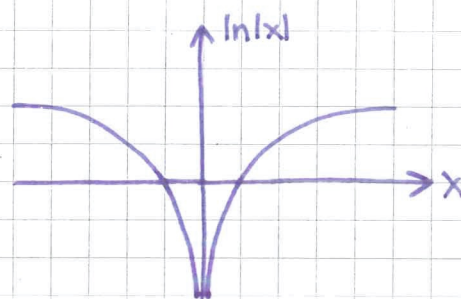
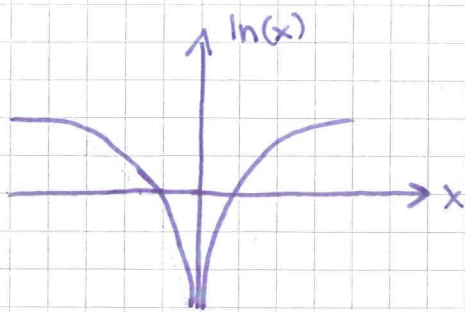
Tre exempel på **udda funktioner** är

$f(x) = \cos x$, $f(x) = x$ och $f(x) = x^3$

Kapitel 8.1 - 8.3: Elementära funktioner

59





60 Logaritmlagarna:

- 1 ${}^a\log(xy) = {}^a\log(x) + {}^a\log(y)$
- 2 ${}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a\log(x) - {}^a\log(y)$
- 3 ${}^a\log(x^k) = k \cdot {}^a\log(x)$

Bevis: Vi vet att $x = a^{a\log x} = {}^a\log(a^x)$ och enligt potenslagarna gäller: $a^x a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ och $(a^x)^y = a^{xy}$. Detta ger i ordning:

$$1 \quad {}^a\log(xy) = {}^a\log(a^{a\log x} \cdot a^{a\log y}) = {}^a\log(a^{a\log x + a\log y}) = a\log x + a\log y$$

$$2 \quad {}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a\log\left(\frac{a^{a\log x}}{a^{a\log y}}\right) = {}^a\log(a^{a\log x - a\log y}) = a\log x - a\log y$$

$$3 \quad {}^a\log(x^k) = {}^a\log((a^{a\log x})^k) = {}^a\log(a^{k a\log x}) = k a\log x$$

61 $a^x a^y = a^{x+y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^x b^x = (ab)^x$

$${}^a\log(st) = {}^a\log s + {}^a\log t \quad {}^a\log\left(\frac{s}{t}\right) = {}^a\log s - {}^a\log t$$

$${}^a\log(s^t) = t {}^a\log s$$

62 ${}^a\log x = {}^a\log(e^{\ln(x)}) = \ln x \cdot {}^a\log(e)$

Kapitel T och 8.4: Trigonometri, trigonometriska funktioner

63 $\sin x = \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$

$$\cos x = \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$$

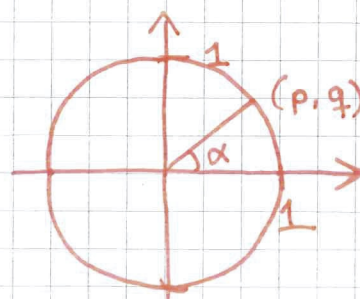
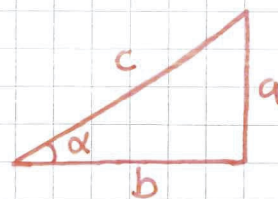
$$\tan x = \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$$

$$\cot x = \frac{b}{a} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}$$

$$\sin x = q$$

$$\cos x = p$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$$



$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$$

64. Trigonometriska ettan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ visas enkelt genom Pythagoras sats i enhetscirkeln.

65. $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$$

$$\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$$

Dessa visas genom att man inser att triangel 1, 2, 3 och 4 är kongruenta.

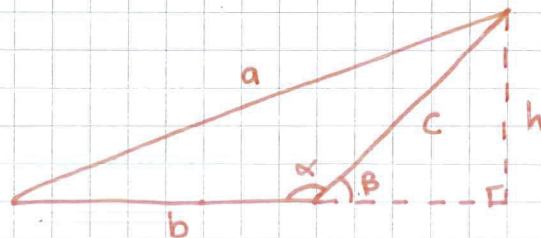
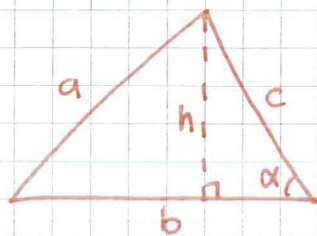
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$$

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos(x)$$

Även dessa visas då man inser att triangel 1, 2, 3 och 4 är kongruenta.

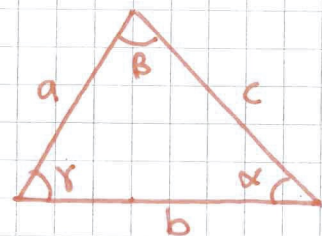
66. Areasatsen eller sats 1 säger att arean av en triangel är halva produkten av två sidors längder multiplicerat med sinus för mellanliggande vinkel, dvs $A = \frac{bc}{2} \sin x$



Bevis Anhängen kan vinkeln vara spetsig (vänster figur) eller trubbig (höger figur). I vänster figur gäller $h = c \sin x$ och i höger $h = c \sin \beta = c \sin(180^\circ - x) = c \sin x$. I båda fallen gäller alltså $A = \frac{bh}{2} = \frac{b}{2} c \sin x$ #

67 **Sinussatsen** eller sats 2 säger att i en triangel med sidorna a, b, c och motstående vinklarna α, β, γ gäller att

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$



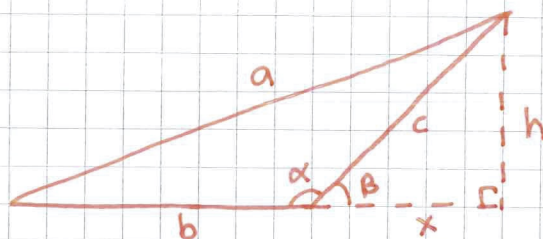
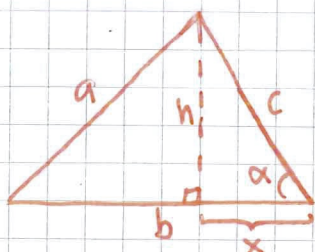
Bevis Areasatsen på respektive hörn ger att

$$A = \frac{ab}{2} \sin \gamma = \frac{ac}{2} \sin \beta = \frac{bc}{2} \sin \alpha$$

Multiplikeras varje led med $\frac{2}{abc}$ fås resultatet i satsen.

68 **Cosinussatsen** eller sats 3 säger att om sidorna i en triangel är a, b, c och den till sidan a motstående vinkeln är α så gäller:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$



Bevis Vi börjar med det fall då $\alpha > 90^\circ$ (högra figuren). Det gäller att $h = c \sin \beta = c \sin(180^\circ - \alpha) = c \sin \alpha$ och $x = c \cos(180^\circ - \alpha) = -c \cos \alpha$.

Pythagoras sats ger:

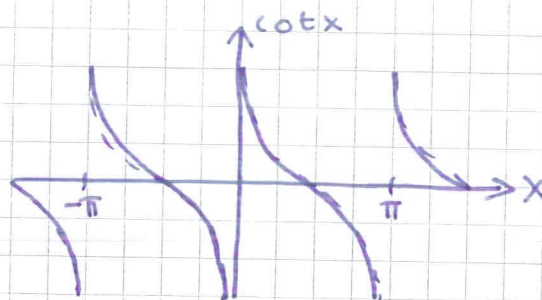
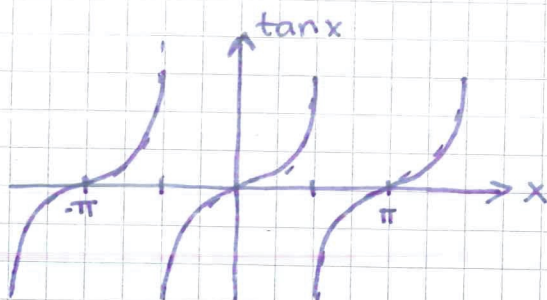
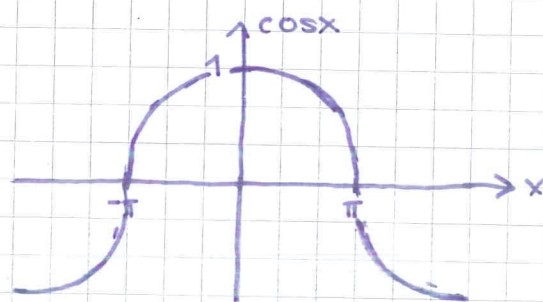
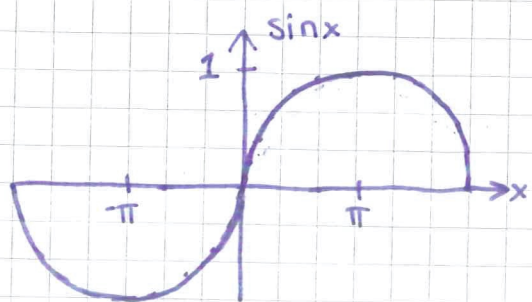
$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b+x)^2 = c^2 \sin^2 \alpha + (b - c \cos \alpha)^2 = \\ &= c^2 \sin^2 \alpha + b^2 - 2bccos\alpha + c^2 \cos^2 \alpha = \\ &= b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \end{aligned}$$

I det fall då $\alpha < 90^\circ$ (vänstra figuren) gäller att $h = c \sin \alpha$ och $x = c \cos \alpha$. Pythagoras sats ger att:

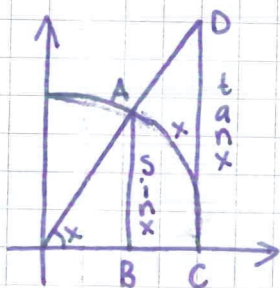
$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 = c^2 \sin^2 \alpha + (b - c \sin \alpha)^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

69 $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$

70



71



Kurvan är enhetscirkeln inritad i första kvadranten. Här syns tydligt att linjestycket AB med längd $\sin x$ är kortare än cirkelbågen AC med längd x . Cirkelbågen är i sin tur kortare än linjestycket CD med längd $\tan x$. Denna bild illustrerar alltså olikheten $\sin x < x < \tan x$ då $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

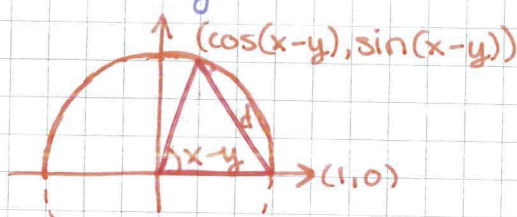
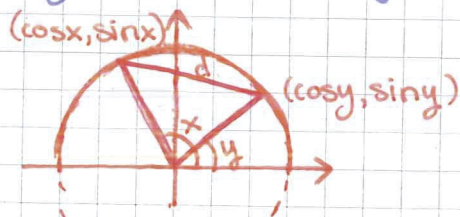
72

Additionsformlerna för cosinus och sinus lyder:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Beis



Ur den högra figuren får vi:

$$d^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

Ur den vänstra figuren, där triangeln enbart

roterats ned till x-axeln, får vi:

$$d^2 = (\cos(x-y) - 1)^2 + (\sin(x-y) - 0)^2$$

Alltså

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = (\cos(x-y) - 1)^2 + \sin^2(x-y)$$

$$\cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y =$$

$$= \cos^2(x-y) - 2\cos(x-y) + 1 + \sin^2(x-y)$$

$$1 - 2\cos x \cos y + 1 - 2\sin x \sin y = 1 - 2\cos(x-y) + 1$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos(x - (-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y) =$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y =$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

I specialfallet då $x=y$ finns formler för dubbla vinkeln

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

- 73 Hjälppunkelmetoden är ett sätt att skriva om en kombination av cosinus- och sinusvågor som en enda cosinus- eller sinusvåg. Detta enligt sats 8.7:

$$a\sin(wx) + b\cos(wx) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(wx + \varphi)$$

$$\text{där } \varphi \text{ uppfyller } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\sqrt{a^2 + b^2}$ kallas amplitud, φ kallas fasförskjutning och w vinkelfrekvens.

- 74 En cirkel med radien r har arean πr^2 och omkrets $2\pi r$.

- 75 Sambandet mellan båglängd b , vinkel α och radien r för en cirkelsektor är $b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r = \alpha r$ (om α i rad)

- 76 Givet radien och båglängden för en cirkelsektor är dess area $\frac{\alpha}{360} \pi r^2 =$

Kapitel 8.5: Arcusfunktioner

- 77 Arcusfunktionerna är inversfunktioner till de trigonometriska funktionerna. Eftersom dessa inte är injektiva på hela $\mathbb{R}$ så är arcusfunktionerna bara definierade på intervall:

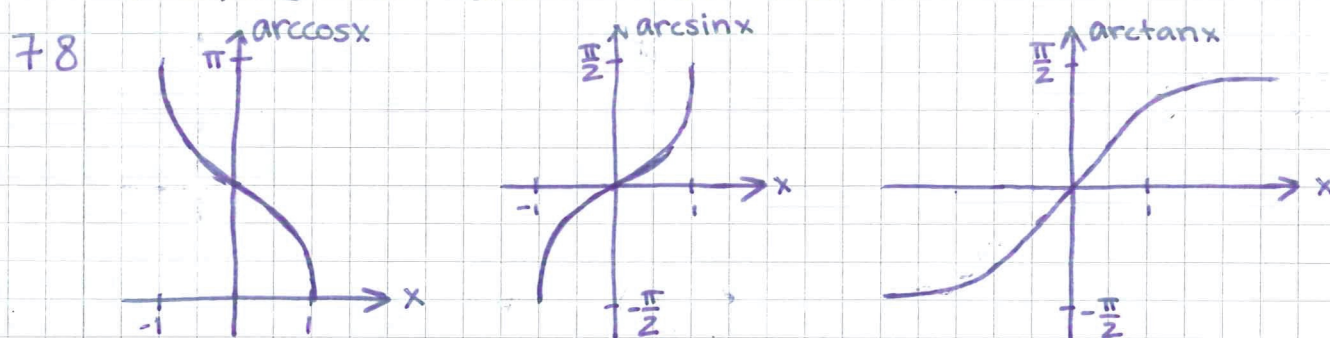
$$\sin x = y \iff \arcsin y = x \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = y \iff \arccos y = x \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\tan x = y \iff \arctan y = x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot x = y \iff \operatorname{arccot} y = x \quad 0 < x < \pi$$

Arcsin och arccos har definitionsmängd $[-1, 1]$ och arctan har hela $\mathbb{R}$.



Kapitel 9: Gränsvärden

- 79 Då $x > 0$ och $a > 1$ gäller att $a^x > x^a > \ln x$ då $x \rightarrow \infty$ eftersom det enligt sats 9.3 gäller:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^a} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{\ln x} = \infty$$

- 80 Talet e definieras som $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

- 81 Funktionen f är kontinuerlig i punkten a om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- 82 Några egenskaper hos kontinuerliga funktioner på slutna, begränsade intervall är att de antar alla värden mellan sina ändpunkter minst en gång

(Sats 9.8) och de antar ett största och minsta värde på intervallet (Sats 9.9)

83

Standardgränsvärdena lyder

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^a} = \infty \quad \begin{matrix} a > 0 \\ a > 1 \end{matrix} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^{\log x}} = \infty \quad \begin{matrix} a > 0 \\ a > 1 \end{matrix} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0 \quad a > 0 \quad (7)$$

Utgår vi ifrån (1) och (3) så kan vi härleda de fem övriga:

$$(2): \text{ Låt } t = a^{\log x}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^{\log x}} = \left[\begin{matrix} t = a^{\log x} \Rightarrow x = a^t \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{matrix} \right] = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a^t)^a}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a^a)^t}{t} = \infty \text{ enligt (1)}$$

(4): Utgår vi ifrån olikheten $\sin x < x < \tan x \Leftrightarrow$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Då $\cos x$ är kontinuerlig gäller att $\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0^+$. $\frac{x}{\sin x}$ är då instängd av två funktioner som båda har gränsvärdet 1. Vi har alltså

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

För $x < 0$ gäller

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{matrix} t = -x \Rightarrow x = -t \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow t \rightarrow 0^+ \end{matrix} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$(5): \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \left[t = 1/x \Rightarrow x = \frac{1}{t} \right]_{x \rightarrow 0^{\pm} \Rightarrow t \rightarrow \pm\infty} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = \ln e = 1 \quad \text{enligt 3}$$

$$(6): \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[t = e^x - 1 \Rightarrow x = \ln(1+t) \right]_{x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = 1$$

$$(7): \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \ln x = \left[t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \right]_{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \right)^x \ln \left(\frac{1}{t} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t^{-1}}{t^x} = \lim_{t \rightarrow \infty} - \frac{\ln t}{t^x} = 0 \quad \text{enligt (1)}$$

$$84 \quad f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$85 \quad \text{Serien } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ är konvergent om } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n u_n = A$$

Om gränsvärdet inte finns (eller är oändligheten) sägs serien vara konvergent.

$$86 \quad \text{För en konvergent serie } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ sägs ha}$$

$$\text{Summan } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n u_n.$$

$$87 \quad \sum_{n=0}^n x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^n x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \begin{cases} \frac{0 - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} & |x| < 1 \\ \text{Saknas} & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ är konvergent med summan } \frac{1}{1-x}$$

precis då $|x| < 1$.

Kapitel 10: Derivator

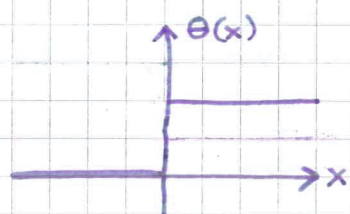
$$88 \quad \text{Funktionen } f \text{ är deriverbar i punkten } a \text{ om} \\ \text{för definierad i en omgivning kring } a \text{ och} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existerar.}$$

89 $f'(a)$ betecknar gränsvärdet och kallas derivatan av $f(x)$ i punkten a .

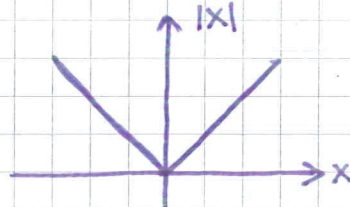
90 För att visa att om $f(x)$ är deriverbar i a så är $f(x)$ kontinuerlig i a så ska vi visa att $f(a+h) \rightarrow f(a)$ då $h \rightarrow 0$ om $f'(a)$ existerar. Ekvivalent är att $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0$
$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h = f'(a) \cdot h \rightarrow 0$$
då $h \rightarrow 0$.

Motsatsen gäller inte garanterat t.ex. är $|x|$ kontinuerlig, men inte deriverbar.

91

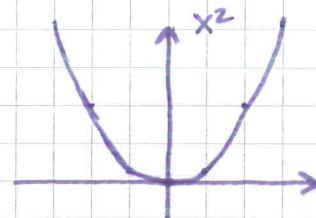


diskontinuerlig
i $x=0$



kontinuerlig,
men inte

deriverbar i $x=0$



deriverbar
i $x=0$

92

$$\frac{d}{dx} e^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

93

Några fysikaliska tolkningar av $f'(t)$ är hastighet, om f är en sträcka, temperaturförändring, om f är en temperatur, eller volymförändring, om f är en volym

94

Tangenten till en funktionskurva $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ är en linje som går genom denna punkt och har lutningen $f'(a)$. Enligt enpunktsformeln har tangenten följande ekvation:
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

95 För normalen till tangenten i punkt $(a, f(a))$

gäller ekvationen $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} (x - a)$

96 $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{d}{dx} f(g(x)) + f\left(\frac{d}{dx} g(x)\right) = f'(g(x)) + g'(x)$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)} = \frac{1}{f'(x)} \quad \begin{array}{l} f \text{ injektiv m. invers } f^{-1} \\ y = f(x) \quad f'(x) \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{d}{dx} f(x)g(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Bevis $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) =$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\frac{d}{dx} f(x)g(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad g(x) \neq 0$$

Bevis $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}}{g(x+h)g(x)} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)}{g(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

97 $\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{\frac{d}{dx} e^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ där $f(y) = \ln y = x$
 $f^{-1}(x) = e^x = y > 0$
enligt formeln för derivata för inversfunktioner

$$\frac{d}{dy} \ln |y| = \begin{cases} \frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{y} & y > 0 \\ \frac{d}{dy} \ln(-y) = -\frac{1}{y} \frac{d}{dy} (-y) = -\frac{1}{y} (-1) = \frac{1}{y} & y < 0 \end{cases}$$

98 Derivatorna av standardfunktionerna är

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \quad a > 0, \text{ konstant}$$

$$\frac{d}{dx} {}^a \log x = \frac{1}{x \ln a} \quad a > 0, a \neq 1 \text{ konstant}$$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \text{ konstant}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

99 $\frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \sin(h) \cos(x) - \sin(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right) =$$

$$= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$$

100 $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\text{t}y \quad y = \arcsin x \iff x = \sin y$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \cos y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

där $y = \arccos x \iff x = \cos y$

101 f har lokalt minimum i punkten a innebär att $f(a) \leq f(x)$ för alla $x \in D_f$ nära a .

102 En lokal extrempunkt innebär att funktionen har ett lokalt minimum eller maximum.

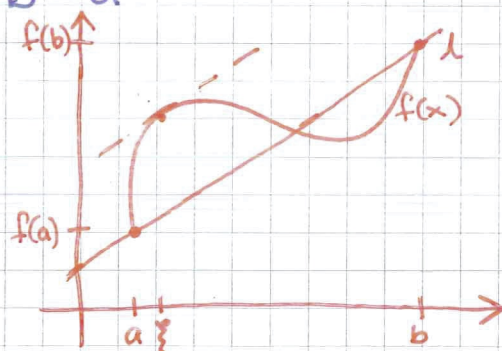
En stationär punkt är varje punkt a som uppfyller att $f'(a) = 0$

103 För att hitta lokala extrempunkter till en deriverbar funktion undersöker vi först i vilka punkter som derivatan är noll. Sedan gör vi en teckentabell för att undersöka kring vilka stationära punkter som derivatan byter tecken. Om den gör det är punkten en lokal extrempunkt, annars är den en terrasspunkt.

104 Medelvärdessatsen eller sats 10.7 säger att om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på $]a, b[$ så finns (minst) en punkt ξ , $a < \xi < b$, så att $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Denna sats betyder helt enkelt att det finns en punkt ξ där lutningen (=derivatan) är samma som

om vi dragit en linje l mellan punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$



105 Vi vill bevisa mha medelvärdessatsen att om en funktion på ett intervall I har en positiv derivata så är funktionen strängt växande.

Antag $x_1, x_2 \in I$ så att $x_1 < x_2$. Enligt medelvärdes-satsen vet vi att det finns ett $\xi \in]x_1, x_2[$ så att:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \iff f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Det gäller att $f'(\xi) > 0$.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0 \iff f(x_2) > f(x_1)$$

106 Vi vill bevisa mha medelvärdessatsen att om en funktion på ett intervall I har en derivata som är noll så är funktionen konstant.

Antag $x_1, x_2 \in I$ så att $x_1 < x_2$. Enligt medelvärdes-satsen vet vi att det finns ett $\xi \in]x_1, x_2[$ så att:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \iff f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Det gäller att $f'(\xi) = 0$.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \iff f(x_2) = f(x_1)$$

107 Att $y = ax + b$ är en sned asymptot till en funktionskurva $y = f(x)$ då $x \rightarrow \infty$ innebär att $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$

108 Till en rationell funktion bestämmer vi asymptoter genom polynom division.

$$\text{Eftersom } \frac{f(x)}{x} = k + \frac{m}{x} = (f(x) - (kx + m)) \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \cdot 0 = 0$$

och m är konstant ($\frac{m}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$) måste det gälla att

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow k \quad \text{och} \quad f(x) - kx \rightarrow m \quad \text{då } x \rightarrow \infty$$

109 För en deriverbar funktion $f(x)$, $x \in I$ löser man ett optimeringsproblem genom att undersöka funktionens värde i stationära punkter, punkter där funktionen inte är deriverbar och ändpunkterna till intervallet I . Man kommer i någon av dessa att hitta det största/minsta värdet om detta finns. Det finns alltid ett största och minsta värde om funktionen är kontinuerlig över ett kompakt intervall.

110 För att visa $f(x) > g(x)$, $x \in I$ och f, g deriverbara gör man omskrivningen $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ och visar istället att $h(x) > 0$, $x \in I$. Detta ser man till exempel om $h(x)$ är strängt växande ($h'(x) > 0$) och $h(x) > 0$ för det lägsta x i I .